1- ما هو البيان الذي يحوي n عقدة وعدد ألوانه هو 1؟

ج- البيان الفارغ

2- ليكن $T(V,E)$ بياناً لا يحتوي على دورات حيث $|V|=n$ عندئذٍ إن T شجرة إذا وفقط إذا كان $|E|=n-1$

(الإثبات) $n=|V|$

لتكن T شجرة عندئذٍ أن $|E|=n-1 \Leftarrow$

الآن لنفرض أن T بيان لا يحتوي على دورات حيث $|V|=n$ و $|E|=n-1$

للإثبات أن T شجرة يكفي أن نثبت أن T مترابط.

لتكن $C_i=(V_i, E_i)$ حيث $i=1,2,3,\dots,m$

هي مركبات T حيث كل منها مترابطة

بما أن T لا تحوي على دورات فإن كل C_i لا تحوي على دورات

وبالتالي فإن كل C_i هي شجرة إذن $|E_i|=|V_i|-1$

لكل $i=1,2,3,\dots,m$ إذن

$$|E_1|+\dots+|E_m|=(|V_1|-1)+\dots+(|V_m|-1)$$

وبالتالي فإن $|E|=|V|-m$ إذن ~~$n-1=m-1$~~ وبالتالي $n-1=n-m$

فإن $m=1$ إذن T مترابط

تمرين الشجرة تابع نظرية

3- هل تستطيع مد سكك حديدية بين ثلاث مدن من دولة إلى ثلاث مدن من دولة أخرى دون أن تتقاطع

الحل: لا نستطيع لأن البيان الموافق إيزومورفيزم مع البيان $K_{3,3}$

4- هل يمكن أن تكون بيانات العجلة W_n قابلة للتجزئة

الحل: لا يمكن لأن عدد ألوان W_n هو

$$\chi(W_n)=\begin{cases}4 & \text{if } n \text{ even}\\ 3 & \text{if } n \text{ odd}\end{cases}$$

5) كم عدد ألوان البيان $C_n + K_1$

$$\chi(C_n + K_1) = \begin{cases} 3 & \text{if } n \text{ even} \\ 4 & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$$

6) هل البيان K_6 مستوٍ ولماذا؟

حل: لا يمكن أن يكون كذلك لأن $\chi(K_6) = 6 > 4$ وهذا يناقض مبرهنة الألوان الأربعة

7) متى تكون بيانات الحلقة قابلة للتجزئة؟

حل: تكون البيانات C_n قابلة للتجزئة عندما تكون n زوجية حيث يكون عدد الألوان في هذه الحالة لونان

8) أي البيانات الأفلاطونية تام

الحل: البيان الأفلاطوني هو البيان tetrahedron

9) أعط مثال عن بيان من البيانات التي درسناها يعرف شجرة

إن بيان النجمي S_n يعرف شجرة

بالإضافة إلى بيان السبيل P_n.

10) إذا كان G_1 بيان جزئي من G_2 ماذا يمكن أن تقول عن $\chi(G_1)$ ، $\chi(G_2)$؟

إذا كان G_1 بيان جزئي من G_2 فإن $\chi(G_1) \le \chi(G_2)$

2

(11) أذكر أسماء البيانات الأفلاطونية ؟

tetrahedron

octahedron

Dodecahedron

Hexahedran (b- cube)

Icosahedron

نظم جدول فيه عدد العقد وعدد الأضلاع ودرجته في حال كان منتظم وعدد الوجوه . أي من البيانات الأفلاطونية هو بيان تام

أذكر اسم البيان الذي هو إيزومورفي معه ومتى لا يكون بيان ما جسور ؟

أي من البيانات الأفلاطونية قابل للتجزئة ؟

tetra...	octa....	cube......	Icosa.....	dodeca.....	
4	6	8	12	20	عدد العقد
6	12	12	30	30	عدد الأضلاع
نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	منتظم
3	4	3	5	3	درجته
نعم	لا	لا	لا	لا	تام
رباعي السطوح	ثماني السطوح	سداسي السطوح	عشرين سطحاً	اثني عشر سطحاً	الوجوه

جميع البيانات الأفلاطونية مسطحة ومنتظمة .

tetra...... هو بيان تام وهو إيزومورفي مع البيان K_4 ....

لا يكون البيان G جسور إذا كانت جميع العقد زوجية .

البيان cube.... هو قابل للتجزئة

(12) كم عدد الألوان اللازمة لتلوين البيان tetrahedron ؟

أربعة لأنه بيان تام

كم عدد الألوان اللازمة لتلوين البيان (cube...) (Hexahedron)

الحل لونين لأنه بيان قابل للتجزئة .

Scanned by CamScanner

ما هي عدد الألوان في البيانات S_3 و S_5 و S_8 ؟

حل : كل من البيانات S_3 و S_5 و S_8 يلون بلونين

في الحقيقة كل البيانات النجمية S_n قابلة للتجزئة وبالتالي لا بد أنها تلون بلونين

(تلون العقدة التي درجتها $n-1$ بلون واحد والعقد التي درجتها واحد تلون بلون مختلف)

$$S_n \cong K_{1,n-1}$$

14 (أ) ما هي قيم n في البيان التام K_n التي يكون من أجلها K_n بيان جزئي من K_m $(n \leq m)$

(ب) ما هي قيم n التي من أجلها يكون البيان الفارغ N_n بيان جزئي من N_m $(n \leq m)$

(ج) ما هي قيم n التي من أجلها يكون N_n بيان جزئي من K_m $(n \leq m)$

(د) إذا كان K_m بيان جزئي من N_n ما هي قيم m وقيم n

$m = 1$ و $(n \geq 1)$

15 K_n هل هو منتظم ؟ مترابط ؟ على ؟ مفصول ؟ كما متممه ؟

الحل :

إن K_n منتظم درجته $(n-1)$ ومترابط لأن كل عقدتين متصلتين بضلع وهو غير مفصول (لأنه مترابط ولا يحوي على رأس قطع)

متممه البيان الفارغ N_n

16 أي من البيانات الأفلاطونية يملك دارة أولر ؟

الحل :

البيان octahedron هو الوحيد من البيانات الأفلاطونية الذي يحوي دارة أولر.

ج/

[17] ما هو الشرط الذي يجب وضعه على r و s حتى يكون البيان القابل للتجزئة التام $K_{r,s}$ دارة أويلر؟

الحل: يجب أن تكون كل من r و s زوجي

[18] كل البيانات التامة K_n حيث $\frac{n}{2}$ هي بيانات هاملتونية.

[19] البيانات الأفلاطونية هي بيانات هاملتونية.

[20] يكون البيان التام القابل للتجزئة $K_{r,s}$ هو بيان هاملتوني عندما وفقط.

الحل: عندما $r=s$

[21] أي من البيانات n-cub هي بيانات هاملتونية؟

الحل: عندما $n = 2,3,4,5$ فإن n-cub هي بيانات هاملتونية.

[22] أوجد عدد ألوان البيانات C_7 و C_8 و C_{11}. أوجد عدد ألوان البيان C_n، حتى يكون البيان C_n قابلاً للتجزئة.

الحل:
C_7 يلون بثلاث ألوان
C_8 يلون بلونين
C_{11} يلون بثلاث ألوان
في حالة العامة عندما n فردي نستخدم 3 ألوان
عندما n زوجي نستخدم 2 لون
يكون C_n بيان قابل للتجزئة عندما يكون n زوجي

[23] كم عدد أضلاع W_n

الحل: تمثل W_n عقدة واحدة درجتها $(n-1)$ وتمثل $(n-1)$ عقدة درجتها
مجموع الدرجات لذلك:

$$(n-1)+3(n-1)=4n-4$$

ولكن عدد الأضلاع هو نصف مجموع الدرجات وبمعنى آخر هو
$2n-2$

س: أي من البيانات التامة K_n تملك دارة أويلر؟

الحل: يمثل البيان التام دارة أويلر عندما n فردي

25 هل بيان الدرب P_n منتظم؟ ما طوله؟ هل هو موصول؟

الحل: يكون منتظم فقط من الدرجة 2 ، وطوله (n-1) ، وموصول عندما تكون $n \geq 3$

[ما يكون من الدرجة 3 وما فوق تكون درجة العقدة البدائية والنهائية واحد وباقي العقد تكون من الدرجة الثانية لذلك هو غير منتظم]

26 هل البيان النجمي S_n منتظم؟ تام؟ قابل للتجزئة؟ موصول؟

الحل: إنه غير منتظم [درجة المركز هو n-1 ودرجة بقية الرؤوس هي الواحد].

نعم مترابط - غير تام - قابل للتجزئة - موصول (لأن عقدة المركز هي عقدة القطع)

متممه $K_{n-1} \cup N_1$

27 أوجد عدد أضلاع البيان البسيط التام؟

وما درجة كل عقدة من K_n؟

الحل: إن البيان التام ~~البسيط~~ هو بيان منتظم من الدرجة (n-1) (درجة كل عقدة)

أما بالنسبة لعدد أضلاع البيان البسيط التام؟

مجموع درجات الرؤوس = عدد الأضلاع × 2

$n(n-1)$ = عدد الأضلاع × 2

عدد الأضلاع = $\frac{n(n-1)}{2}$

28 - أثبت أنه إذا كان G بيان منتظم عندئذٍ $\overline{G}$ أيضاً بيان منتظم ؟

الحل : نعلم أن في البيان المنتظم تكون درجات جميع عقده متساوية

وبالتالي يتم البيان المنتظم هو بيان جميع درجات عقده متساوية .

$n-r-1$

$\Leftarrow \overline{G}$ منتظم درجته

29 - ما عدد عقد وأضلاع بيانات الضم والاتحاد وهل هي منتظمة ؟
أم تامة ؟ أم قابلة للتجزئة أم لا ؟ ولماذا ؟

الحل : بيانات الإتحاد

$$|V(G_1 \cup G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$$

$$|E(G_1 \cup G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)|$$

وهي بيانات غير منتظمة في الحالة العامة وتكون منتظمة
إذا كان كل من G_1 و G_2 منتظم ومن نفس الدرجة .
وتكون درجة بيان الاتحاد هي نفس درجة G_1 و G_2 .
وهي غير تامة وغير قابلة للتجزئة .

أما بالنسبة لبيانات الضم :

$$|V(G_1 + G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$$

$$|E(G_1 + G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$$

غير تامة
غير منتظمة في الحالة العامة

٨

التمرين الأول :

ما عدد جسور الشجرة ؟

$n-1$ جسر لأن كل ضلع هو جسر

التمرين الثاني

لتكن T شجرة ثنائية عدد عقدها n من المستوي h (ارتفاعها h)

عندئذٍ

$$h+1 \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

الإثبات :

ليكن n_k هو عدد العقد في المستوي k نلاحظ $n_k \leq 2 \cdot n_{k-1}$

$$n_1 \leq 2n_0 = 2$$

$$n_2 \leq 2 \cdot n_1 \leq 2^2$$

$$n_3 \leq 2 \cdot n_2 \leq 2^3$$

إذاً بالاستقراء الرياضي نجد أن :

$$1 \leq n_k \leq 2^k$$

نأخذ المجموع من $0 \leftarrow h$

$$\sum_{k=0}^{h} 1 \leq \sum_{k=0}^{h} n_k \leq \sum_{k=0}^{h} 2^k$$

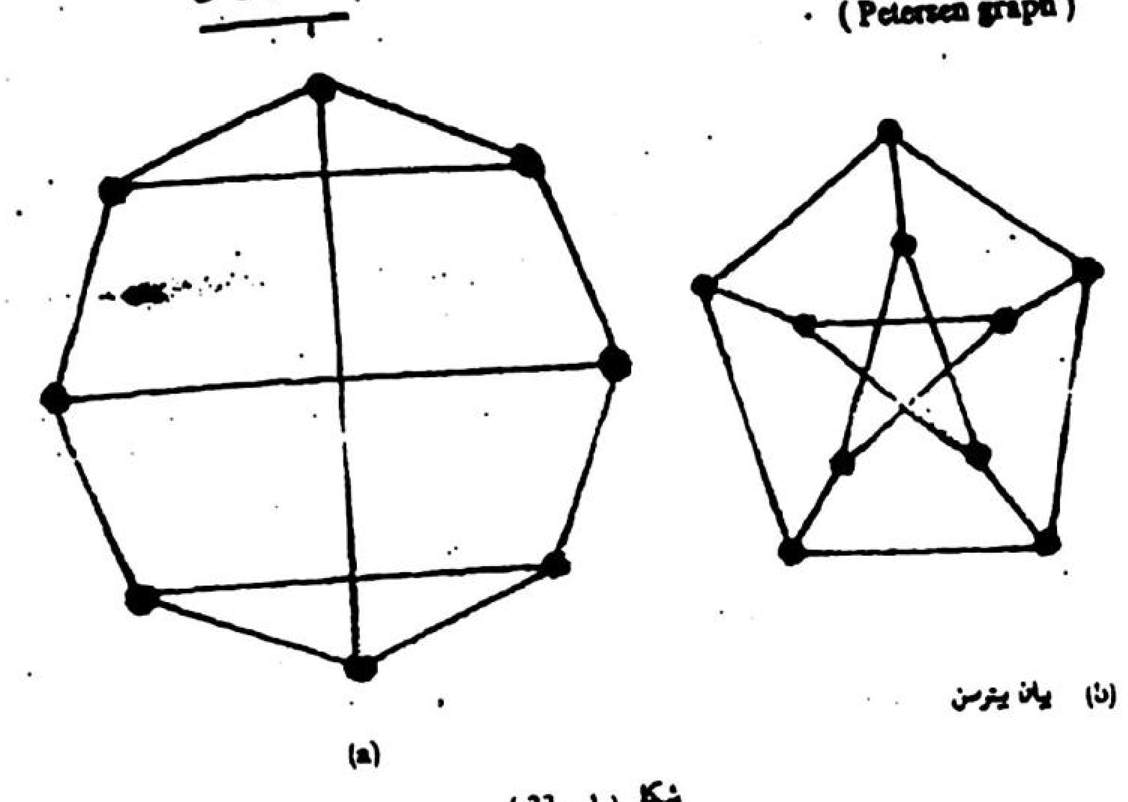
$$h+1 \leq n \leq 2^{h+1}-1$$

لأن :

$$\sum_{k=0}^{h} q^k = \frac{1-q^{h+1}}{1-q} = \frac{1-2^{h+1}}{1-2} = 2^{h+1}-1$$

صفر طبيعي، ان متمم كل بيان منتظم-r بسيط هو بيان منتظم-(n−r−1).

من البيانات المنتظمة المهمة، في قضايا التلوين بالاخص، هي البيانات التكعيبية (the cubic graphs) وهي التي تكون درجة كل رأس فيها مساوية لـ3. ففي شكل (1 − 23) يوجد بيانان تكعيبيان؛ يعرف البيان في (b) باسم بيان بيترسن (Petersen graph).



(a)

(b) بيان بيترسن

شكل (1 − 23)

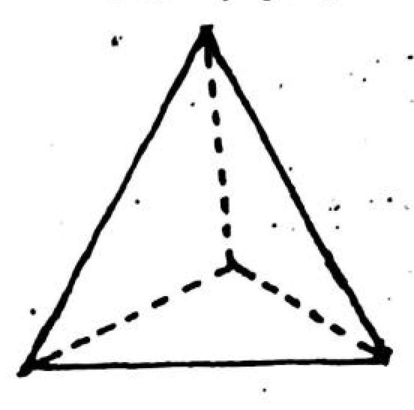
من البيانات المنتظمة المشهورة تلك المعروفة باسم بيانـــات أفلاطونية (Platonic graphs)، وهي بيانات منتظمة تتكون من رؤوس وحافات الاجسام (الافلاطونية) المنتظمة الخمسة الآتية: رباعي السطوح (أي هرم ثلاثي) (tetrahedron)، مكعب، ثماني السطوح (octahedron)، وذو الاثني عشر سطحاً (dodecahedron). وذو العشرين سطحاً (icosahedron)؛ وقد رسمت هذه الاجسام في شكل (1 − 24) ورسم في شكل (1 − 25) البيانات الافلاطونية المقابلة لها، على الترتيب.

يعرف البيان الثنائي التجزئة (bipartite graph) بانه بيان $G = (V, E)$ بحيث يمكن تجزئة(*) المجموعة V الى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 بحيث أن كل

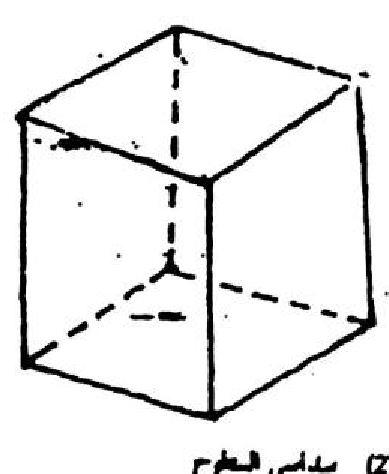
(*) يقال ان $V_1, V_2, \ldots, V_r$ تجزئة للمجموعة V اذا كان:

$(a)\ V_i \neq \phi;\quad (b)\ V_i \cap V_j = \phi,\ i \neq j;\quad (c)\ V = \cup_{i=1}^{r} V_i.$

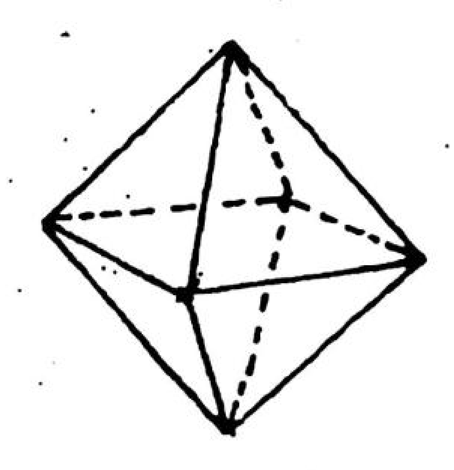
حافة في E تصل رأساً في V_1 برأس في V_2 . [أنظر شكل (1 − 26)]. ويمكن أن نرمز لهذا البيان الثنائي التجزئة بـ $G = (V_1 , V_2 ; E)$.



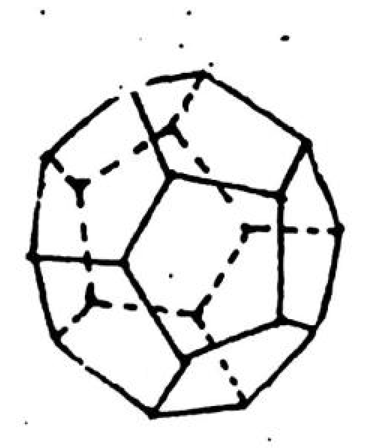
(1) ثلاثي السطوح



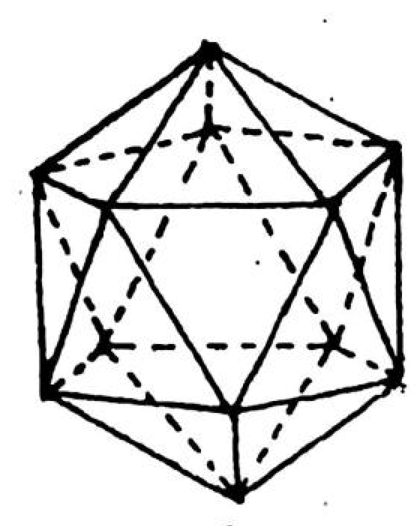
(2) سداسي السطوح



(3) ثماني السطوح

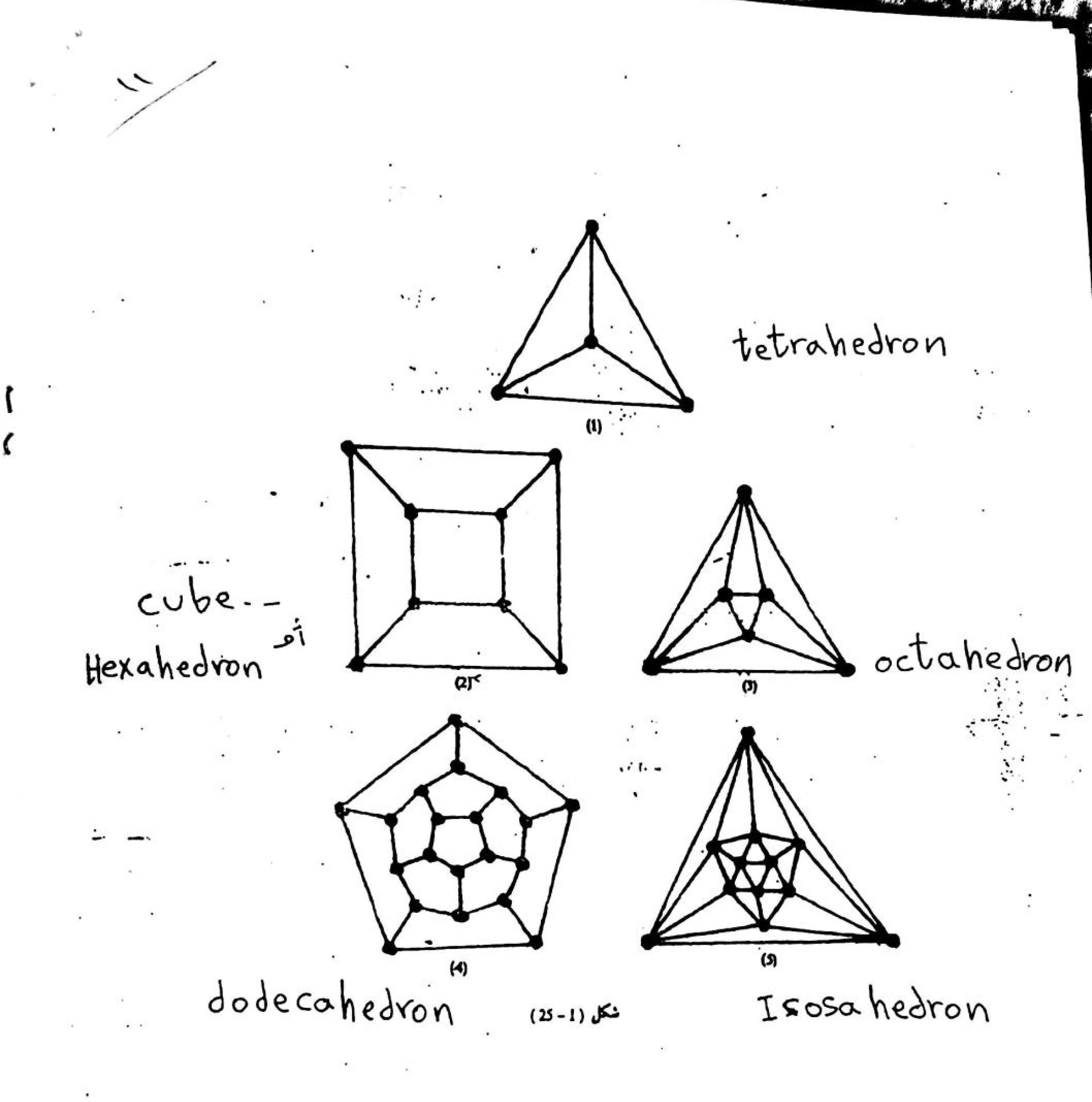


(4) ذو الاثني عشر سطحاً



(5) ذو العشرين سطحاً

شكل (1 − 24)


tetrahedron
(1)
cube - -
أو
Hexahedron
(2)
octahedron
(3)
(4)
dodecahedron
(5)
Isosahedron

شكل (25-1)